

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky
a komunikačních technologií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY
A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ**

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

ÚSTAV TELEKOMUNIKACÍ

DEPARTMENT OF TELECOMMUNICATIONS

**VYTVOŘENÍ INTERAKTIVNÍCH PROGRAMŮ PRO
PODPORU VÝUKY ZPRACOVÁNÍ SIGNÁLŮ**

INTERACTIVE SOFTWARE TOOLS FOR TEACHING SIGNAL PROCESSING

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ondrej Pacas

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Marie Mangová

BRNO 2018

Bakalářská práce

bakalářský studijní obor **Teleinformatika**

Ústav telekomunikací

Student: Ondřej Pacas

ID: 189079

Ročník: 3

Akademický rok: 2017/18

NÁZEV TÉMATU:

Vytvoření interaktivních programů pro podporu výuky zpracování signálů

POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

Vytvořte programy pro interaktivní podporu výuky zejména v kurzu Analýza signálů a soustav. Budou napsány v JavaScriptu a tématicky zaměřeny na: 1/ metodu nejmenších čtverců a lineární regresi, 2/ interpolaci a rekonstrukci signálu z jeho vzorků, 3/ diskrétní lineární a kruhovou konvoluci v 1D, 4/ diskrétní křížovou korelaci. Nastudujte problematiku k příslušným apletům, navrhnete interaktivní podobu apletů a naimplementujete je. Zaměřte se hlavně na jejich názornou podobu a funkčnost pro potřeby výuky.

DOPORUČENÁ LITERATURA:

[1] Smékal, Z.: Analýza signálu a soustav. Vysoké učení technické v Brně, 2012. ISBN 978-80-214-4453-9.

[2] Smith, S. W. : The scientist and engineer's guide to digital signal processing. San Diego, Calif.: California Technical Pub., 1997. ISBN 09-660-1763-3.

Termín zadání: 5.2.2018

Termín odevzdání: 29.5.2018

Vedoucí práce: Ing. Marie Mangová

Konzultant:

prof. Ing. Jiří Mišurec, CSc.
předseda oborové rady

UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

ABSTRAKT

Bakalářská práce se zabývá vytvořením čtyř interaktivních nástrojů pro podporu výuky zpracování signálů. Cílem práce je vytvořit aplikace které budou vizuálně interpretovat jednotlivé metody zpracování signálů. Toto zahrnuje aplikace pro lineární regresi a metodu nejmenších čtverců, interpolaci a rekonstrukce signálu z jeho vzorků, diskrétní lineární konvoluci a diskrétní křížovou korelaci. Aplikace jsou vytvořeny v programovacím jazyce JavaScript.

KLÍČOVÁ SLOVA

JavaScript, React, HTML5, canvas, signál, rekonstrukce signálu, regrese, aproximace, metoda nejmenších čtverců, konvoluce, korelace, křížová korelace, interpolace

ABSTRACT

This thesis deals with creation of four interactive applications for educational purposes in the field of digital signal processing. The goal of this work is to create four applications which will visually interpretate each of the methods of signal processing. This involves applications for linear regression and least squares method, interpolation and signal reconstruction from its samples, discrete linear convolution and discrete cross-correlation. Applications are created using JavaScript programming language.

KEYWORDS

JavaScript, React, HTML5, canvas, signal, signal reconstruction, regression, approximation, least squares method, convolution, correlation, cross-correlation, interpolation

PACAS, Ondrej. *Vytvoření interaktivních programů pro podporu výuky zpracování signálů*. Brno, 2018, 38 s. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav telekomunikací. Vedoucí práce: Ing. Marie Mangová

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma „Vytvoření interaktivních programů pro podporu výuky zpracování signálů“ jsem vypracoval(a) samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autor(ka) uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této bakalářské práce jsem neporušil(a) autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl(a) nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědom(a) následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis autora(-ky)

PODĚKOVÁNÍ

Rád bych poděkoval vedoucí bakalářské práce paní Ing. Marii Mangové, za odborné vedení, konzultace, trpělivost a podnětné návrhy k práci. Dále bych chtěl poděkovat své rodině za podporu.

Brno

.....

podpis autora(-ky)

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum popsany v této bakalářské práci byl realizován v laboratořích podpořených z projektu SIX; registrační číslo CZ.1.05/2.1.00/03.0072, operační program Výzkum a vývoj pro inovace.

Brno

.....
podpis autora(-ky)

OBSAH

Úvod	9
1 Metoda nejmenších čtverců a lineární regrese	10
1.1 Aproximace přímkou	10
1.2 Aproximace parabolou	12
1.3 Aproximace exponenciálou	13
1.4 Aproximace polynomem m -tého stupně	13
1.5 Trigonometrická aproximace	14
2 Interpolace a rekonstrukce signálu	15
2.1 Rekonstrukce signálu	15
2.1.1 Schodová interpolace	15
2.1.2 Lineární interpolace	16
2.1.3 Ideální rekonstrukce	17
2.2 Matematické metody interpolace	18
2.2.1 Lagrangeova interpolace	19
2.2.2 Newtonova interpolace	19
2.2.3 Interpolace splajnem	20
3 Základní operace se signály	22
3.1 Konvoluce	23
3.1.1 Diskrétní lineární konvoluce	24
3.2 Korelace	25
3.2.1 Diskrétní křížová korelace	27
4 Implementace aplikací	29
4.1 Kompatibilita	29
4.2 Aplikace Lineární regrese a metoda nejmenších čtverců	29
4.3 Aplikace Interpolace a rekonstrukce signálu	30
4.4 Aplikace Diskrétní lineární konvoluce	30
4.5 Aplikace Diskrétní křížová korelace	30
5 Závěr	36
Literatura	37
6 Obsah přiloženého CD	38

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Graf funkce	11
1.2	Metoda nejmenších čtverců (přímka)	12
1.3	Metoda nejmenších čtverců (parabola)	13
2.1	Schodová interpolace $x_s(t) * h(t)$	16
2.2	Schodová impulsní odezva $h(t)$	16
2.3	Lineární interpolace $x_s(t) * h(t)$	17
2.4	Trojuhelníková impulsní odezva $h(t)$	17
2.5	Impulzní odezva ideální dolní propusti	18
2.6	Interpolace a uzly	18
2.7	Interpolace kubickým splajnem	20
3.1	Časové posunutí signálu $s(t)$	22
3.2	Obrácení časové osy	22
3.3	Součet a součin signálů $x(t)$ a $y(t)$	23
3.4	Konvoluce signálů $x(t)$ a $h(t)$. Příspěvek a výsledný signál $y(t)$	23
3.5	Lineární systém	24
3.6	Lineární diskrétní konvoluce $y[n] = x[n] * h[n]$	25
3.7	Dílčí signály konvoluce	25
3.8	Korelace signálů $x(t)$ a $y(t)$	26
3.9	Detekce známého tvaru vlny v šumu	26
3.10	Diskrétní křížová korelace	27
4.1	Uživatelské rozhraní aplikace Regrese	32
4.2	Uživatelské rozhraní aplikace Interpolace	33
4.3	Uživatelské rozhraní aplikace Konvoluce	34
4.4	Uživatelské rozhraní aplikace Korelace	35

ÚVOD

Při výuce v předmětech zabývajících se zpracováním signálů může být někdy složité pochopit jak určité metody na zpracování fungují. Interaktivní aplikace umožňují studentům učit se experimentálně takže jsou velmi efektivní. Tato práce je proto zaměřena na tvorbu aplikací, které mají názorně ukazovat určité metody zpracování signálů a podpořit tak výuku v těchto předmětech.

První kapitola je věnována lineární regresi a metodě nejmenších čtverců. V rámci teoretického úvodu je vysvětlen matematický model jednotlivých aproximací včetně jednoduchých příkladů.

Druhá kapitola obsahuje v podstatě dvě části. První část popisuje interpolaci jako způsob zpětné rekonstrukce spojitého signálu z jeho diskrétních vzorků, vzorkovací teorém, rekonstrukci použitím metody nejbližšího souseda a metody lineární interpolace a dále ideální rekonstrukci signálu. Druhá část popisuje matematické metody interpolace.

Třetí kapitola pojednává o základních operacích se signály, jako jsou, sčítání, násobení signálů, časové otočení a posunutí. Dále také diskrétní konvoluci a diskrétní křížovou korelaci dvou signálů, jak jednotlivé škálované a posunuté impulsní odezvy přispívají do výsledného signálu. Je zde obsažen obrázkový příklad těchto operací.

Technickou implementaci a ovládání celé aplikace nastiňuje čtvrtá kapitola. Aplikace jsou naprogramovány v jazyce JavaScript, který se stává stále populárnější v oblasti webu a cloudových technologií. Při jejich tvorbě byly použity nejmodernější technologie, jako např. ReactJS v kombinaci s HTML5 hardwarevě akcelerovaným plátnem canvas, dále také nejnovější standardy jazyka JavaScript ECMAScript6. Pár aplikací zabývajících se stejnou problematikou již bylo v minulosti vytvořeno, avšak žádný z nich nevyužíval technologie zmíněné výše. Jedná se proto o zcela nové návrhy. Cílem této práce je nastudování teoretických podkladů pro tyto aplikace, jejich následná implementace a otestování.

1 METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ A LINEÁRNÍ REGRESE

Pojmy metoda nejmenších čtverců a lineární regrese představují matematicko-statistické metody a jsou v podstatě ekvivalentní. Používají se pro aproximaci neboli **proložení daných hodnot přímkou**, nepatrně složitější aplikací je **proložení daných hodnot parabolou** nebo **obecným polynomem předem daného stupně**. [1]

1.1 Aproximace přímkou

Představme si dvě veličiny x a y . Mezi těmito veličinami je lineární vztah ve tvaru $y = c_0x + c_1$. Měřením byly pro konkrétní hodnoty veličiny x naměřeny odpovídající hodnoty veličiny y a byly graficky znázorněny. Jelikož je měření vždy zatíženo nějakou chybou jako například odchylka teploty, špatné nastavení nebo nepřesnost přístrojů nebo lidský faktor, a hodnoty v praxi se liší od hodnot ideálních, jednotlivé body nebudou ležet přesně na jedné přímce. Právě metoda nejmenších čtverců nám pomůže najít co nejpřesnější matematický model neboli umístit přímku tak aby ležela co nejlíže bodům z měření. To znamená, že hledáme přímku pro kterou bude součet ploch jednotlivých čtverců minimální. Tento součet značíme p^2 a nazýváme ho **kvadratická odchylka**. Matematicky lze vyjádřit vztahem [1]

$$\begin{aligned} p^2(c_0, c_1) &= (y_0 - c_0 - c_1x_0)^2 + (y_1 - c_0 - c_1x_1)^2 + \dots + (y_n - c_0 - c_1x_n)^2 \\ &= \sum_{i=0}^n (y_i - c_0 - c_1x_i)^2. \end{aligned}$$

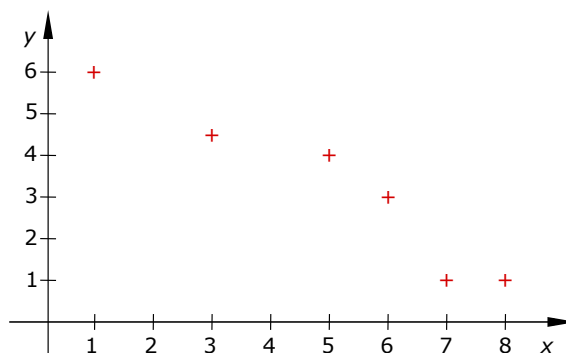
Uvažujme soubor bodů, které vyneseme do grafu viz obrázek 1.1.

x_i	1	3	5	6	7	8
y_i	6	4,5	4	3	1	1

Rovnice prokládané přímkou je $y = c_0x + c_1$. Pro nalezení koeficientů přímky c_0 a c_1 vycházíme ze vztahů [2]

$$c_0 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad c_1 = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (1.1)$$

Proměnná n značí počet uzlů. Potřebné hodnoty si pro přehlednost zapíšeme do tabulky.



Obr. 1.1: Graf funkce

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	6	1	6
2	3	4,5	9	13,5
3	5	4	25	20
4	6	3	36	18
5	7	1	49	7
6	8	1	64	8
Σ	30	19,5	184	72,5

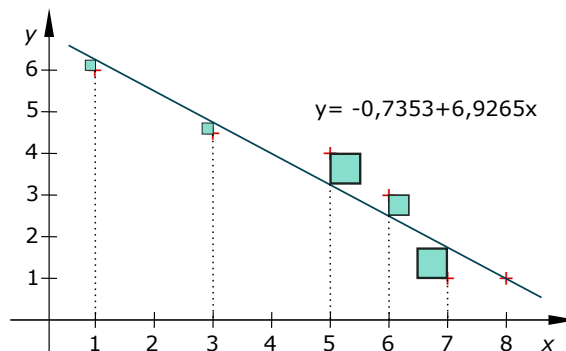
Dosazováním hodnot z tabulky do vztahů 1.1 dostáváme

$$\begin{aligned}
 n &= 6 \\
 a &= \frac{6 \cdot 72,5 - 30 \cdot 19,5}{6 \cdot 184 - (30)^2} \\
 a &= -\frac{25}{34} \doteq \underline{\underline{-0,7353}}.
 \end{aligned}$$

Obdobně vypočítáme i koeficient b

$$\begin{aligned}
 b &= \frac{184 \cdot 19,5 - 30 \cdot 72,5}{6 \cdot 184 - (30)^2} \\
 b &= \frac{471}{68} \doteq \underline{\underline{6,9265}}.
 \end{aligned}$$

Výsledná přímka je tedy $y = -0,7353 + 6,9265x$, je zobrazena na obrázku 1.2 a představuje nejlepší aproximaci.



Obr. 1.2: Metoda nejmenších čtverců (přímka)

1.2 Aproximace parabolou

Aproximace parabolou nebo také kvadratická aproximace, se řeší obdobně jako aproximace přímkou. Opět k zadaným bodům $[x_i, y_i], i = 0, \dots, n$, hledáme parabolu o rovnici $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ pro niž bude minimální kvadratická odchylka [1]

$$p^2(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=0}^n (y_i - c_0 - c_1x_i - c_2x_i^2)^2.$$

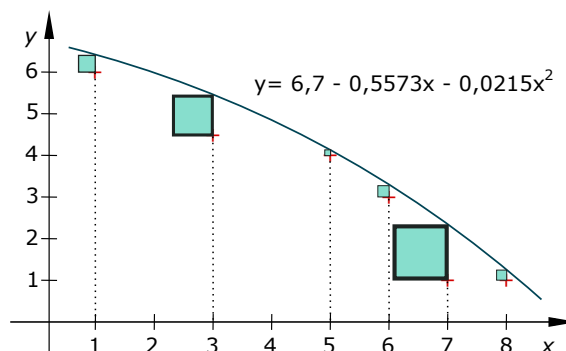
Koeficienty c_0, c_1, c_2 získáme řešením soustavy rovnic 1.2

$$\begin{aligned} c_0(n+1) + c_1 \sum_{i=0}^n x_i + c_2 \sum_{i=0}^n x_i^2 &= \sum_{i=0}^n y_i \\ c_0 \sum_{i=0}^n x_i + c_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 + c_2 \sum_{i=0}^n x_i^3 &= \sum_{i=0}^n x_i y_i \\ c_0 \sum_{i=0}^n x_i^2 + c_1 \sum_{i=0}^n x_i^3 + c_2 \sum_{i=0}^n x_i^4 &= \sum_{i=0}^n x_i^2 y_i \end{aligned} \quad (1.2)$$

kde $n+1$ je počet uzlů. [1] Uvažujme body z předchozího příkladu 1.1 a zkusme je proložit parabolou. Řešením soustavy rovnic 1.2

$$\begin{pmatrix} 6 & 30 & 184 \\ 30 & 184 & 1224 \\ 184 & 1224 & 8500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19,5 \\ 72,5 \\ 367,5 \end{pmatrix}$$

dostáváme $c_0 \doteq 6,7$, $c_1 \doteq -0,5573$ a $c_2 \doteq -0,0215$. Rovnice naší paraboly bude tedy $y = 6,7 - 0,5573x - 0,0215x^2$ a bude vypadat tak jako na obrázku 1.3.



Obr. 1.3: Metoda nejmenších čtverců (parabola)

1.3 Aproximace exponenciálou

Pro zadané body $[x_i, y_i], i = 0, \dots, n, n \geq 1$ hledáme nejlepší křivku popsánu obecnou rovnicí $y = c_0 \cdot e^{c_1 x}$. Kvadratickou odchylku lze v tomto případě vyjádřit jako [1]

$$p^2(c_0, c_1) = \sum_{i=0}^n (y_i - c_0 \cdot e^{c_1 x_i})^2.$$

Hledáním jejího minima by nás dovedlo na soustavu dvou nelineárních rovnic o dvou neznámých jejíž řešení je výpočetně náročnější a nad rámec existujícího problému. Zlogaritmováním obecné rovnice dostaneme $\ln y = \ln c_0 + c_1 x$. Na takto upravenou rovnici už lze aplikovat postup pro výpočet koeficientů c_0 a c_1 stejně jako u přímky, ale je třeba pamatovat, že nyní již nepracujeme s y_i , ale s $\ln y_i$.

1.4 Aproximace polynomem m -tého stupně

Výše jsme si popsali aproximaci polynomem prvního stupně, to jest přímkou, a aproximaci polynomem druhého stupně, parabolou. Obecně lze obdobným způsobem řešit aproximaci libovolným polynomem až m -tého řádu. Budeme hledat rovnici funkce ve tvaru

$$P_m(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m \quad (1.3)$$

jejíž minimální kvadratickou odchylku vyjádříme

$$p^2(c_0, \dots, c_m) = \sum_{i=0}^n (y_i - P_m(x_i))^2,$$

kde c_0, \dots, c_m jsou reálná čísla. To vede na soustavu m rovnic o m neznámých [1]

$$\begin{aligned}
c_0(n+1) &+ c_1 \sum_{i=0}^n x_i &+ \dots &+ c_m \sum_{i=0}^n x_i^m &= \sum_{i=0}^n y_i \\
c_0 \sum_{i=0}^n x_i &+ c_1 \sum_{i=0}^n x_i^2 &+ \dots &+ c_m \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} &= \sum_{i=0}^n x_i y_i \\
&&&&&\vdots \\
c_0 \sum_{i=0}^n x_i^m &+ c_1 \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} &+ \dots &+ c_m \sum_{i=0}^n x_i^{2m} &= \sum_{i=0}^n x_i^m y_i.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

1.5 Trigonometrická aproximace

Někdy je pro aproximaci zejména periodických dat lepší, použít aproximaci trigonometrickými polynomy, tedy polynomy složené z kombinací funkcí $\sin(x)$ a $\cos(x)$. Opět budeme hledat aproximaci ve tvaru

$$P_m(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_m \varphi_m(x) \tag{1.5}$$

kde φ_i jsou dílčí funkce a c_0, \dots, c_m jsou reálná čísla. Počet dílčích funkcí φ_i je menší než celkový počet bodů, v případě rovnosti už mluvíme nikoliv o aproximaci ale o interpolaci. [3]

Výsledná funkce bude tvaru $y = c_0 \cdot \sin(x) + c_1 \cos(x) + c$. Koeficienty nalezneme obdobně jako v předchozích případech, a to řešením soustavy rovnic 1.2 pouze hodnotu x_i použijeme jako argument funkcí $\sin(x_i)$ a $\cos(x_i)$.

$$\begin{aligned}
c_0(n+1) &+ c_1 \sum_{i=0}^n \sin(x_i) &+ c_2 \sum_{i=0}^n \cos(x_i) &= \sum_{i=0}^n y_i \\
c_0 \sum_{i=0}^n \sin(x_i) &+ c_1 \sum_{i=0}^n \cos(x_i) &+ c_2 \sum_{i=0}^n \sin(x_i) \cos(x_i) &= \sum_{i=0}^n \sin(x_i) y_i \\
c_0 \sum_{i=0}^n \cos(x_i) &+ c_1 \sum_{i=0}^n \sin(x_i) \cos(x_i) &+ c_2 \sum_{i=0}^n \sin^2(x_i) &= \sum_{i=0}^n \sin(x_i) \cos(x_i) y_i.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

2 INTERPOLACE A REKONSTRUKCE SIGNÁLU ZE VZORKŮ

2.1 Rekonstrukce signálu

Existuje mnoho technik které možno použít k rekonstrukci signálu. To, kterou techniku zvolit obvykle záleží na přesnosti jaké chceme docílit a také do jaké míry je signál převzorkován. Rekonstruovat signál můžeme pomocí **interpolace**. Interpolaci signálu můžeme řešit v **časové oblasti** nebo ve **frekvenční oblasti**. V časové oblasti si tento proces můžeme představit tak, že v podstatě chceme zaplnit díry mezi jednotlivými hodnotami vzorků. Jde v podstatě o konvoluci jistého vzorkovaného signálu $x_s(t)$ jistou funkcí $h(t)$, tedy: [4]

$$x(t)_{rekon} = h(t) * x_s(t) \quad (2.1)$$

Ve frekvenční oblasti si interpolaci můžeme představit jako filtrační proces:

$$X(\omega)_{rekon} = H(\omega)X_s(\omega) \quad (2.2)$$

přičemž se snažíme zachovat centrální část periodického spektra $X_s(\omega)$ a zároveň potlačit jeho repliky vyšších frekvencí.

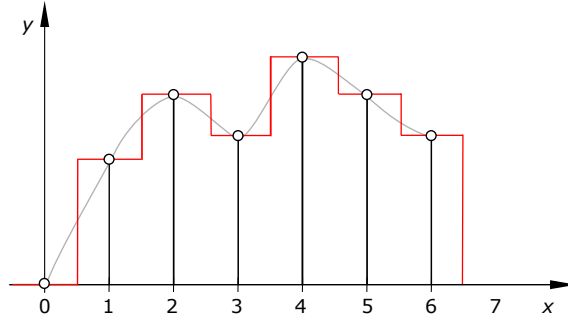
Aby bylo možné získat časově spojitý signál zpět z jeho diskrétních vzorků, musí být signál vzorkován dostatečnou vzorkovací frekvencí. Tuto frekvenci nám určuje **Shannonův vzorkovací teorém**. Ten je definován jako

$$f_{vz} \geq 2f_{max} \quad (2.3)$$

kde f_{vz} je vzorkovací frekvence a f_{max} je maximální frekvence spektra. Slovně lze vzorkovací teorém interpretovat tak, že vzorkovací frekvence musí být větší nebo rovna dvojnásobku maximální frekvence obsažené ve spektru vzorkovaného signálu, jinak dochází k překrývání sousedních spekter, neboli k **aliasingu**. [7]

2.1.1 Schodová interpolace

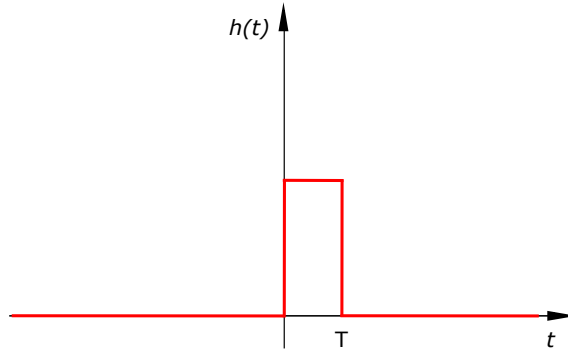
Nazývá se také **metoda nejbližšího souseda**, anglicky také **zero-order hold**. Je nejjednodušší z metod, ale nejhorší z hlediska kvality interpolace. Spočívá v tom, že pro každý neznámý bod se nastaví hodnota nejbližšího uzlu (vzorku) tak, jak je znázorněno na obrázku 2.1. [9] Toho lze docílit aplikováním vztahu zmíněného výše



Obr. 2.1: Schodová interpolace $x_s(t) * h(t)$

2.1, kde impulsní odezva filtru bude mít schodový tvar viz obrázek 2.2

$$h(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (2.4)$$



Obr. 2.2: Schodová impulsní odezva $h(t)$

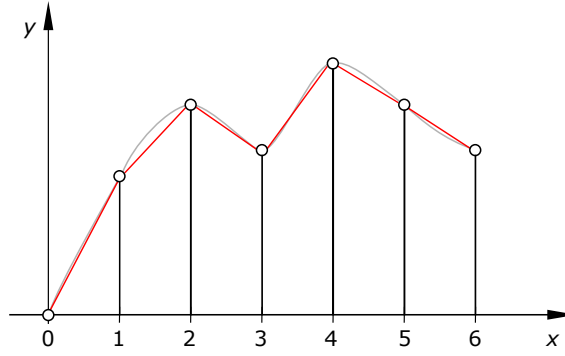
Výsledný signál odpovídá sérii obdélníkových pulsů, jejichž výška je modulována $x(mT_s)$, kde m je pořadí vzorku a T_s je vzorkovací perioda. Ve frekvenční oblasti filtrační funkce dolní propusti odpovídá:

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) e^{-j\omega T_s/2} \quad (2.5)$$

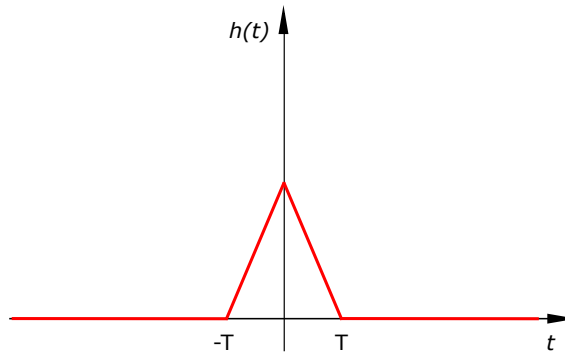
2.1.2 Lineární interpolace

Anglicky **first-order hold**. Spočívá v proložení dvou po sobě jdoucích uzlů přímkou viz obrázek 2.3. [9] Toho lze dosáhnout aplikováním vztahu 2.1 a dosazením impulsní odezvy filtru trojúhelníkového tvaru viz obrázek 2.4.

$$h(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & 0 \leq |t| \leq T \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (2.6)$$



Obr. 2.3: Lineární interpolace $x_s(t) * h(t)$



Obr. 2.4: Trojúhelníková impulsní odezva $h(t)$

Výsledný signál poté odpovídá sečtené sérii trojúhelníkových impulsů o amplitudě hodnoty vzorku. Ve frekvenční oblasti filtrační funkce dolní propusti odpovídá:

$$H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)] = \frac{4}{\omega^2 T_s} \sin^2\left(\frac{\omega T_s}{2}\right) \quad (2.7)$$

2.1.3 Ideální rekonstrukce

Spojité signál lze získat z posloupnosti vzorků prostřednictvím **dolní propusti**. Tato z pohledu spektra odfiltruje spektrální složky způsobené periodizací posloupnosti impulsů-vzorků. K ideální nebo-li perfektní rekonstrukci uvažujeme ideální dolní propust, která má **obdélníkovou spektrální charakteristiku** viz obrázek 2.5, kterou ve frekvenční oblasti uvažujeme 2.8:

$$H(\omega) = \begin{cases} T_s, & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0, & \text{jinak} \end{cases} \quad (2.8)$$

V časové oblasti uvažujeme 2.9:

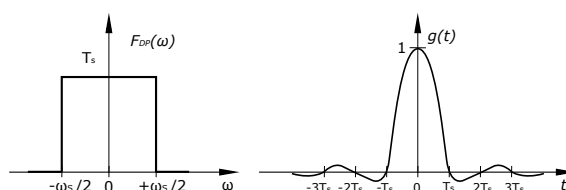
$$h(t) = \mathcal{F}[H(\omega)] = T_s \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} \quad (2.9)$$

kde ω_c je mezní frekvence. Takovouto ideální dolní propust poté použijeme k rekonstrukci spojitého signálu $X(\omega)$ z jeho vzorkované podoby $X_s(\omega)$. Pokud je mezní frekvence ω_c větší než maximální frekvence spektra ω_m , ale menší než frekvence vzorku $\omega_s - \omega_m$, pak lze centrální část spektra $X_s(\omega)$ extrahovat a vyškálovat periodou T , zatím co všechny ostatní repliky za mezní frekvencí ω_c budou potlačeny. Výsledkem je perfektně rekonstruovaný signál:

$$X(\omega)_{rekon} = X(\omega).$$

V časové oblasti lze ideální rekonstrukci zapsat jako:

$$x(t) : h(t) * x_s(t) = T_s \frac{\sin(\omega_c t)}{\pi t} * \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT_s) \delta(t - mT_s). \quad (2.10)$$

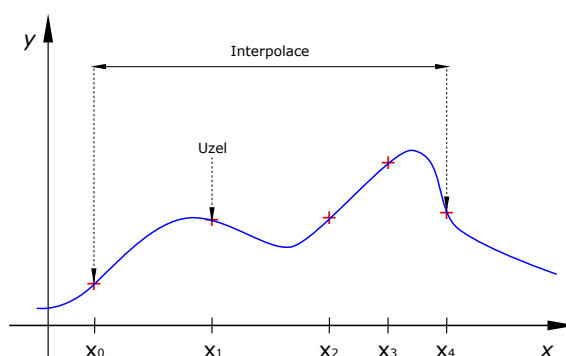


Obr. 2.5: Impulzní odezva ideální dolní propusti

Jedná se samozřejmě pouze o teoretickou idealizaci. Ideální dolní propust v praxi neexistuje.

2.2 Matematické metody interpolace

Z matematického hlediska **interpolací** nazýváme hodnoty mezi prvním a posledním uzlovým bodem viz obrázek 2.6. [1]



Obr. 2.6: Interpolace a uzly

Interpolaci nejčastěji provádíme pomocí interpolačních funkcí ve tvaru polynomu různých stupňů. Stupeň polynomu je přímo úměrný přesnosti interpolace. Podle stupně polynomu rozlišujeme charakter interpolace: [6]

- polynom prvního stupně ($n = 1$) - lineární interpolace (interpolace přímkou)
- polynom druhého stupně ($n = 2$) - kvadratická interpolace (interpolace parabolou nebo kružnicí)
- polynom třetího stupně ($n = 3$) - kubická interpolace (splajny)
- polynomy vyšších řádů

2.2.1 Lagrangeova interpolace

Jednou z možností výpočtu vhodného interpolačního polynomu je použití **Lagrangeovy interpolace**. Platí, že množina uzlových bodů, z nichž žádné dva se neshodují, vede k pouze jedinému řešení. Polynom $P_n(x)$ získáme lineární kombinací známých hodnot f_i a jednotlivých dílčích polynomů l_i které v určitých bodech nabývají hodnot 0 nebo 1, tedy:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f_i l_i(x) \\ &= f_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + f_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ &\dots + f_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pro praktické počítání není Lagrangeův polynom příliš vhodný, zejména pokud chceme přidat další uzlový bod, musíme přepočítat znovu všechny dílčí polynomy l_i .

2.2.2 Newtonova interpolace

Další možností výpočtu interpolačního polynomu je **Newtonova interpolace**. Jedná se v podstatě o Lagrangeův interpolačním polynom, avšak při jeho hledání postupujeme jinak. Polynom budeme hledat ve tvaru: [1]

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x-x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &\dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Koeficienty $f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}]$ najdeme pomocí **poměrných diferencí**. Pro danou funkci f a uzlové body $x_i, i = 0, \dots, n$ definujeme poměrné difference prvního řádu jako:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.13)$$

dále obecně difference k-tého řádu pro $k \leq n$ definujeme jako:

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}, i = 0, \dots, n-k.$$

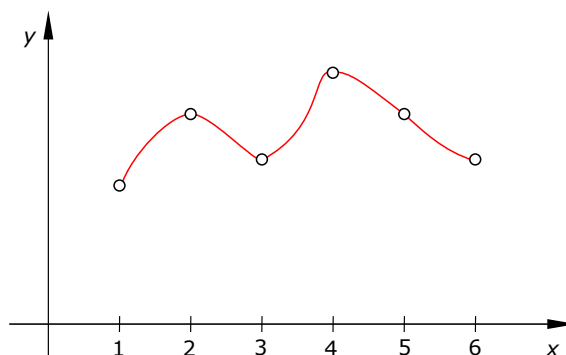
Stejně jako u Lagrangeova polynomu i u Newtonova existuje jediné řešení které splňuje interpolační podmínku $P_n(x_i) = y_i$ pro $i = 0, 1, \dots, n$, tedy, že hodnota polynomu v bodě x_i je rovna hodnotě y_i daného bodu. Výhodou Newtonova interpolačního polynomu je snadnější přidávání nových uzlů bez nutnosti znovu přepočítávat dílčí poměrné difference.

2.2.3 Interpolace splajnem

Interpolace polynomem je vhodnější pro menší počet uzlových bodů neboť s rostoucím počtem uzlů roste i stupeň polynomu. V praxi zpravidla pracujeme s širokým datovým vstupem kde se interpolace polynomem ukazuje jako nevhodná, protože má dobrou přesnost pouze v zadaných bodech a jejich okolí, ale v jednotlivých intervalech může vytvořit např. nevhodné kmitání. Splajn je funkce která je v různých částech intervalů definovaná různě. Můžeme hledat funkci kterou neznáme, nebo nahrazovat funkci kterou známe. Mějme funkci $f(x)$, definovanou uzlovými body x_0, x_1, \dots, x_n . Každý subinterval dvou bodů $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$, chceme proložit kubickým polynomem $S_i(x)$ neboli **splajnem**. Funkce $f(x)$ musí být spojitá v uzlových bodech, společně s první a druhou derivací které musejí být také spojitě. Nejjednodušším příkladem splajnu je **lineární splajn**, kde je funkce $f(x)$ na každém subintervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ proložena přímkou o rovnici:

$$S_i(x) = f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i), x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle. \quad (2.14)$$

V praxi se nejčastěji používá splajn třetího řádu, nebo-li **kubický splajn** obr. 2.7. Uvažujme funkci $f(x)$ s uzlovými body x_0, x_1, \dots, x_n a jejich hodnotami y_i .



Obr. 2.7: Interpolace kubickým splajnem

Platí $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$. Dále uvažujme funkci $S_3(x)$, která pro každé dva uzly x_i, x_{i+1} aproximuje daný interval polynomem třetího stupně a splňuje podmínky spojitosti. Tuto funkci nazýváme kubický splajn. Při konstrukci položíme postupně

pro $i = 0, 1, 2 \dots, n$ $h_i = x_i - x_{i-1}$, tedy:

$$S_3(x) = y_{i-1}(1 - 3t^2 + 2t^3) + y_i(3t^2 - 2t^3) + m_{i-1}h_i(t - 2t^2 + t^3) + m_i h_i(-t^2 + t^3), \quad (2.15)$$

kde $t = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}$ pro $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Parametry y_{i-1}, y_i a m_{i-1}, m_i jsou funkční hodnoty a hodnoty prvních derivací v bodech x_{i-1}, x_i . Z výše uvedeného vyvstává:

$$S_3(x_{i-1}) = y_{i-1},$$

$$S_3(x_i) = y_i,$$

$$S'_3(x_{i-1}) = m_{i-1},$$

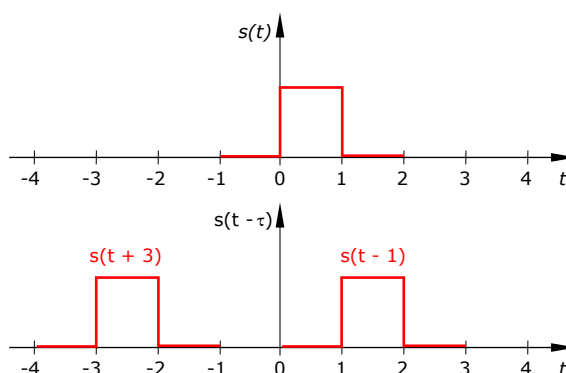
$$S'_3(x_i) = m_i.$$

Samotná definice zajišťuje spojitost první derivace, spojitost druhé derivace zajistíme speciální volbou m_i . [6]

3 ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY

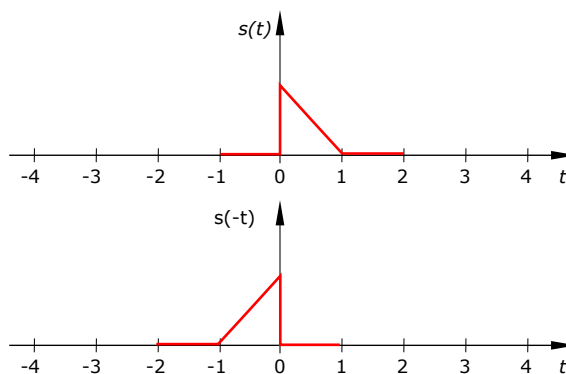
Tato práce se věnuje **konvoluci** a **korelaci**, což jsou operace se dvěma signály. Tyto operace, ale vycházejí se základních dílčích operací **časové posunutí** a **obrácení časové osy**, což jsou operace s jedním signálem přičemž druhý signál se nezmění, a dále také **součin** a **součet** dvou signálů.

Časové posunutí obr. 3.1 přiřazuje signálu $s(t)$ signál $s(t - \tau)$, kde $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau \neq 0$. Pokud $\tau > 0$, jedná se o zpoždění, a pokud $\tau < 0$, jedná se o časové předsunutí signálu.



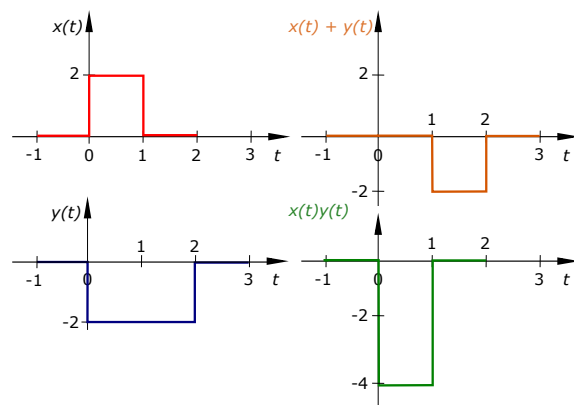
Obr. 3.1: Časové posunutí signálu $s(t)$

Obrácení časové osy obr. 3.2 nahradí signál $s(t)$ signálem $s(-t)$ což znamená otočení časové osy kolem počátku.



Obr. 3.2: Obrácení časové osy

Součet dvou signálů je roven $s(t) = x(t) + y(t)$, takže hodnoty obou signálů jsou sečteny pro stejný časový okamžik t . Obdobně se provede i součin dvou signálů kde $s(t) = x(t)y(t)$. Obě operace jsou znázorněny na obr. 3.3 [5]



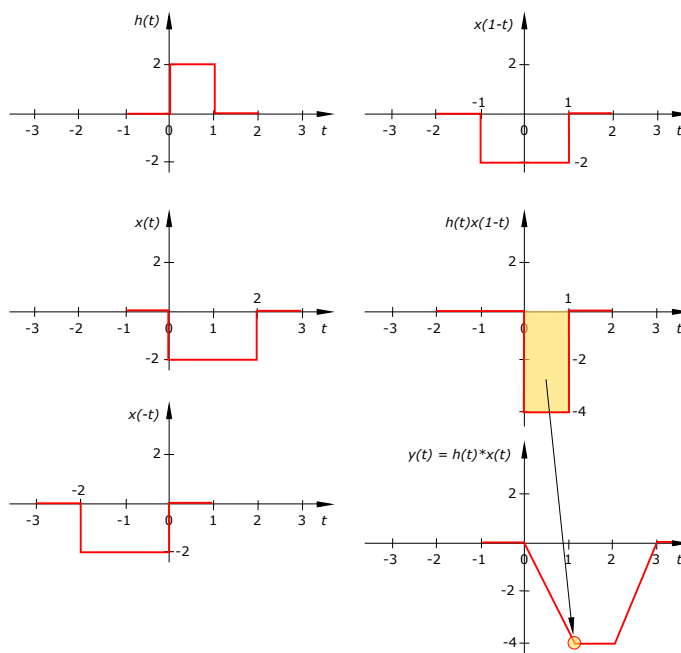
Obr. 3.3: Součet a součin signálů $x(t)$ a $y(t)$

3.1 Konvoluce

Konvoluce je základní operace se dvěma signály. Její operátor značíme $*$ a u dvou spojitých signálů je rovnice definována jako

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau \\ &= h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.1)$$

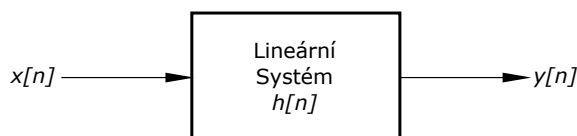
Obrázek 3.4 znázorňuje výpočet příspěvku signálu $x(t)$ při časovém posunutí o 1. Postupným posouváním signálu v čase získáme výsledný signál $y(t)$.



Obr. 3.4: Konvoluce signálů $x(t)$ a $h(t)$. Příspěvek a výsledný signál $y(t)$.

Pokud signál $h(t)$ představuje například impulsní odezvu nějakého filtru, pak konvoluce provádí filtrační proces vstupního signálu $x(t)$. [5] Impulsní odezvu nazýváme obvykle **jádro filtru**, **jádro konvoluce** nebo pouze **jádro**, anglicky také **kernel**. Jde vlastně o odezvu systému na každý vstupní impuls, tedy funkce která ovlivní každý impuls procházející systémem. V oblasti zpracování obrazu, se impulsní odezva nazývá **funkce rozprostření bodů**, anglicky **point spread function**. [9]. **Impuls** je signál mající nulovou hodnotu ve všech bodech s výjimkou jediného nenulového bodu.

3.1.1 Diskrétní lineární konvoluce



Obr. 3.5: Lineární systém

U lineárních systémů platí princip **superpozice**. U libovolného **lineárního** a **časově invariantního** systému lze výstupní signál vyjádřit jako součet jednotkových váhovaných impulsů, tedy impulsů ovlivněných impulsní odezvou systému [8]

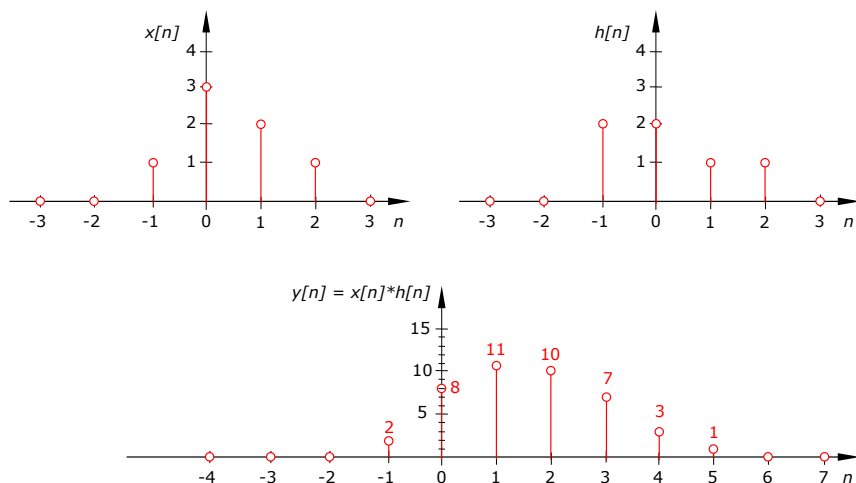
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] \quad (3.2)$$

kde $y[n]$ je výstupní signál, $x[k]$ je pozice impulsu vstupního signálu a $h[n - k]$ je impulsní odezva systému na pozici k posunutého na časové osy o index n . Mějme vstupní signál $x[n]$ složený ze čtyř vzorků $N_1 = 4$. Necháme ho projít systémem se čtyř vzorkovou impulsní odezvou $h[n]$ $N_2 = 4$. Dostaneme výstupní signál $y[n]$ složený ze sedmi vzorků $N = N_1 + N_2 - 1 = 7$ viz obrázek 3.6.

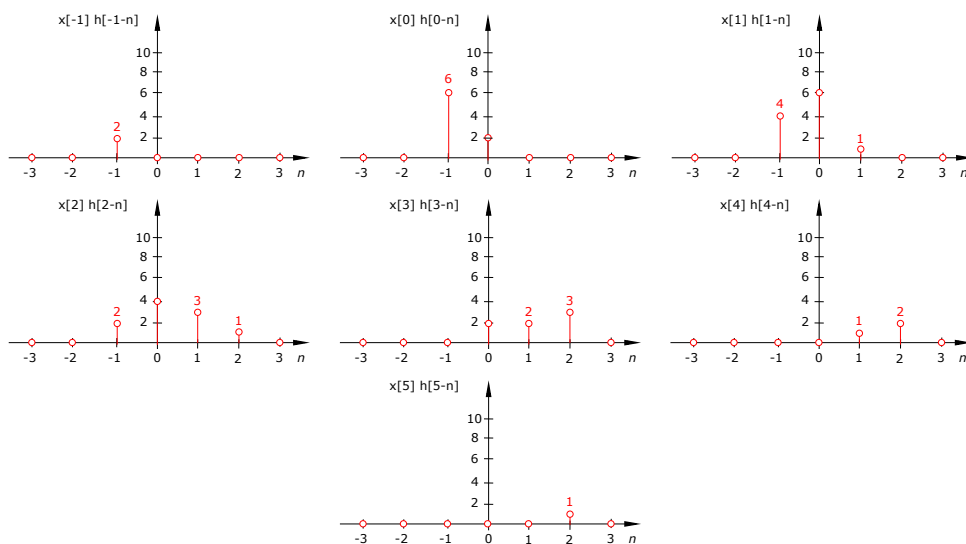
Každý ze čtyř vzorků vstupního signálu $x[n]$ přispěje škálovanou a posunutou verzí impulsní odezvy $h[n]$ do výsledného signálu. Tuto lze vyjádřit jako

$$x[k] \cdot h[n - k],$$

kde $x[k]$ je hodnota impulsu vstupního signálu na pozici k a $h[n - k]$ je impulsní odezva škálovaná a posunutá o k míst vlevo nebo vpravo na časové osy podle znaménka k . Tyto dílčí signály jsou zobrazeny na obrázku 3.7. Výsledný signál $y[n]$ dostaneme součtem těchto dílčích signálů, aplikováním vzorce 3.2 [9].



Obr. 3.6: Lineární diskrétní konvoluce $y[n] = x[n] * h[n]$



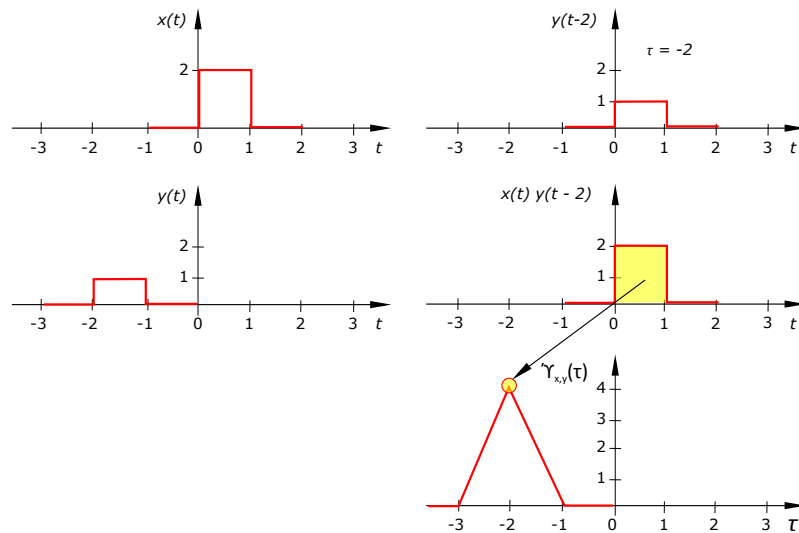
Obr. 3.7: Dílčí signály konvoluce

3.2 Korelace

Korelace je další základní operace se dvěma signály. Je podobná konvoluci. Vyjadřuje míru podobnosti průběhu dvou signálů. Korelace dvou spojitých signálů je rovna: [5]

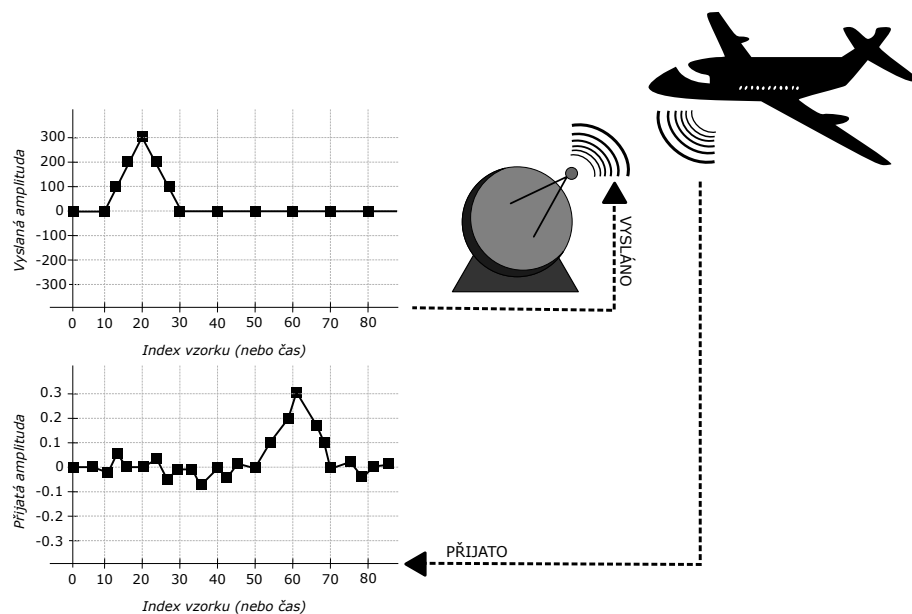
$$\gamma_{x,y}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)dt, \quad (3.3)$$

kde τ představuje zpoždění nebo předstunutí jednoho vstupního signálu vůči druhému a platí $\tau \in R$. Obrázek 3.8 ukazuje příklad výpočtu korelace signálů $x(t)$ a $y(t)$. Největší míra podobnosti je dosažena u zpoždění signálu $y(t)$ o $\tau = -2$.



Obr. 3.8: Korelace signálů $x(t)$ a $y(t)$

Korelace se používá například k **detekci známého tvaru vlny v různě šumícím signálu**. Jako příklad si představme radar. Stejně jako ostatní echo lokační systémy, radar vysílá pulsy energie které se odráží od zkoumaných objektů. Přijatý signál je potom zpožděná verze vysílaného signálu obohacená o náhodný šum. Situaci zobrazenou na obrázku 3.9 nám řeší korelace.

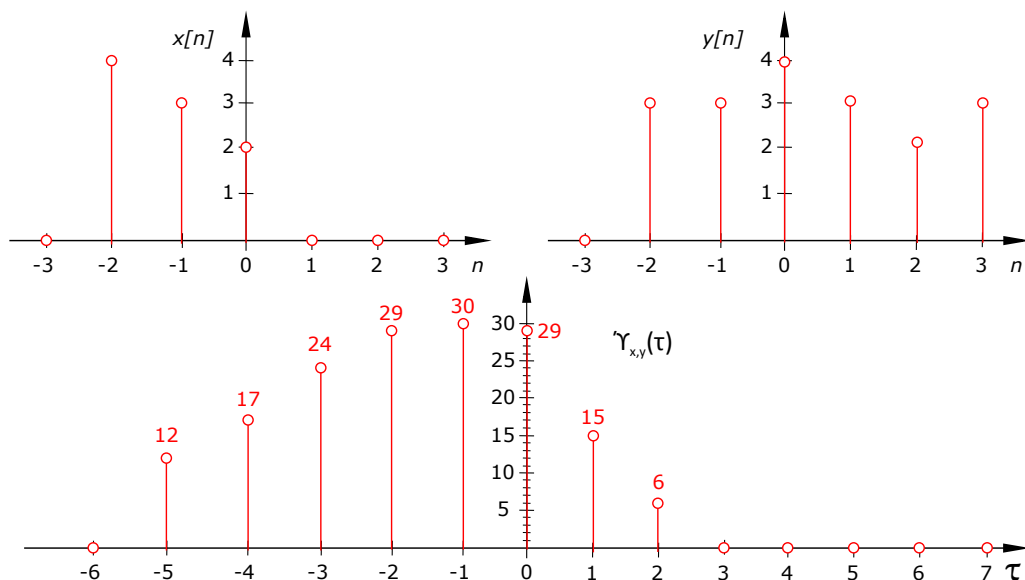


Obr. 3.9: Detekce známého tvaru vlny v šumu

V případě, že počítáme korelaci z dvou rozdílných vstupních signálů, mluvíme o **křížové korelaci**. Pokud jsou oba vstupní signály stejné, mluvíme o **autokorelaci**.
[9]

3.2.1 Diskrétní křížová korelace

Korelace funguje obdobně jako konvoluce. Konvoluce, ale na rozdíl od korelace, pracuje s časově otočeným signálem. Obrázek 3.10 ukazuje diskrétní křížovou korelaci posloupnosti vzorků $x[n]$ a $y[n]$.



Obr. 3.10: Diskrétní křížová korelace

Signál $x[n]$ představuje hledaný tvar vlny zvaný **cílový signál**. Změnou hodnoty τ posunujeme cílový signál vlevo nebo vpravo. $\tau > 0$ znamená posunutí vlevo (předsunutí signálu), zatímco $\tau < 0$ znamená posunutí vpravo (zpoždění signálu). Pro každý vzorek signálu $x[n]$ zpožděného o hodnotu τ je pak vypočtena **korelační funkce** definována jako:

$$\gamma_{x,y}(\tau) = y[n]x[n + \tau]. \quad (3.4)$$

Indikované vzorky signálu $x[n]$ jsou vynásobeny odpovídajícími body signálu $y[n]$ v němž hledáme známý tvar vlny. Tyto násobky jsou pak sečteny a představují hodnotu korelační funkce v čase τ $\gamma_{x,y}(\tau)$. Amplituda každého vzorku ve výsledku korelační funkce znamená jak moc se signál $y[n]$ **podobá** cílovému signálu $x[n + \tau]$ na dané pozici. To znamená, že korelační funkce $\gamma_{x,y}(\tau)$ bude mít maximální hodnotu, když bude cílový signál $x[n]$ **perfektně shodný** s jednotlivými prvky prohledávaného signálu $y[n]$. I v případě, že cílový signál obsahuje vzorky s negativní hodnotou nebo bude celý negativní, bude špička korelační funkce **pozitivní**, protože při perfektní shodě cílového signálu $x[n]$ s prohledávaným signálem $y[n]$ se negativní vzorky cílového signálu násobí sami sebou což má za následek pozitivní hodnotu. [9] Křížová korelace se snaží detekovat cílový signál, ne ho replikovat. Proto není důvod očekávat, že špička výstupního signálu bude vypadat jako cílový signál. Pokud je

šum na prohledávaném signálu, bude šum také na výstupním signálu. S výjimkou špičky, která je ve výstupním signálu **symetrická** mezi svou levou a pravou stranou. Toto platí také v případě, že cílový signál symetrický není. Navíc, šířka špičky v korelačním signálu bude oproti šířce cílového signálu **dvojnásobná**.

Matematická ekvivalence konvoluce a korelace je pouze náhoda a **nedělá** z nich tu samou operaci. Naopak, jedná se o dvě naprosto **odlišné** procedury v oblasti zpracování signálů. Zatím co konvoluce popisuje vztah mezi vstupním signálem, výstupním signálem a impulsní odezvou systému, korelace je technika detekování známého tvaru vlny v šumícím pozadí.

4 IMPLEMENTACE APLIKACÍ

4.1 Kompatibilita

Jednotlivé aplikace byly naprogramovány v jazyce **JavaScript** s nejnovějším standardem **EcmaScript6**, s použitím knihovny **React**. Aplikace by měli podporovat všechny moderní verze webových prohlížečů, s výjimkou prohlížeče Internet Explorer. Aplikace byly testovány ve verzi Internet Explorer 11.0.56 a ukázalo se, že tento prohlížeč **nepodporuje** vůbec některé funkce jako například `Array.find()` použity v logice aplikace. Dále byla aplikace testována v prohlížečích Google Chrome verze 67.0, Mozilla Firefox verze 60.0 a Opera verze 53.0. V těchto prohlížečích se neobjevily žádné komplikace znemožňující, nebo znevýhodňující běh jednotlivých aplikací. Nicméně nejlépe je aplikace odladěna pro prohlížeč Google Chrome, v němž byla vyvíjena.

4.2 Aplikace Lineární regrese a metoda nejmenších čtverců

Aplikace demonstruje aproximaci zadaných hodnot metodou nejmenších čtverců. Uživatelské rozhraní je zobrazeno na obr. 4.1. Vrchní panel menu, umožňuje volit si jednotlivé metody aproximace rozklikávacím menu, umožňuje zobrazit či skrýt nejmenší čtverce a také vyresetovat celou aplikaci t.j smazat všechny vstupní hodnoty a vrátit aplikaci do počátečního stavu. Vstupní hodnoty možno zadávat kliknutím kamkoliv na plátno, nebo manuálně vytvářet jednotlivé body použitím pravého panelu pro vstupní hodnoty. V tomto panelu jsou také zobrazeny veškeré vstupní hodnoty se kterými aplikace momentálně pracuje. Tyto hodnoty možno měnit nebo mazat tak, že uživatel najede myší na příslušný řádek a vpravo se zobrazí dvě ikony. Ikona vlevo spustí editaci, ikona vpravo smaže příslušný bod. V editačním módu je možné měnit hodnoty x a y jejich přímým zadáním do číselného pole. Potvrzení změn provede uživatel opět kliknutím na ikonu na levou ikonu. Kliknutím na pravou ikonu, zahodí aktuálně prováděné změny příslušného bodu. Ve spodní části aplikace je zobrazena aktuálně zvolená aproximace, Výsledek aproximace vypočtené v bodě x ve kterém se uživatel právě nachází myší. Dále je zde zobrazena rovnice aproximace a součet chyb aproximací (nejmenších čtverců).

4.3 Aplikace Interpolace a rekonstrukce signálu

V této aplikaci jsou prakticky znázorněny metody rekonstrukce signálu pomocí interpolace. Snímek uživatelského rozhraní ukazuje obrázek 4.2. Vrchní panel menu umožňuje vybrat si nějaký z předvolených signálů, volit frekvenci vzorkování signálu, volit si jednotlivé metody interpolace, umožňuje zobrazit či skrýt vzorkovaný nebo původní signál a také vyresetovat celou aplikaci t.j smazat všechny vstupní hodnoty a vrátit aplikaci do počátečního stavu. Vstupní originální signál je možné kreslit přímo do plátna kliknutím a tažením myši. Ve spodní části obrazovky je zobrazena aktuálně zvolená interpolace, jak se rekonstruuje signál v bodě x který je definován aktuální pozicí myši. Dále je zde zobrazena rekonstrukční funkce a hodnota vzorkovací frekvence.

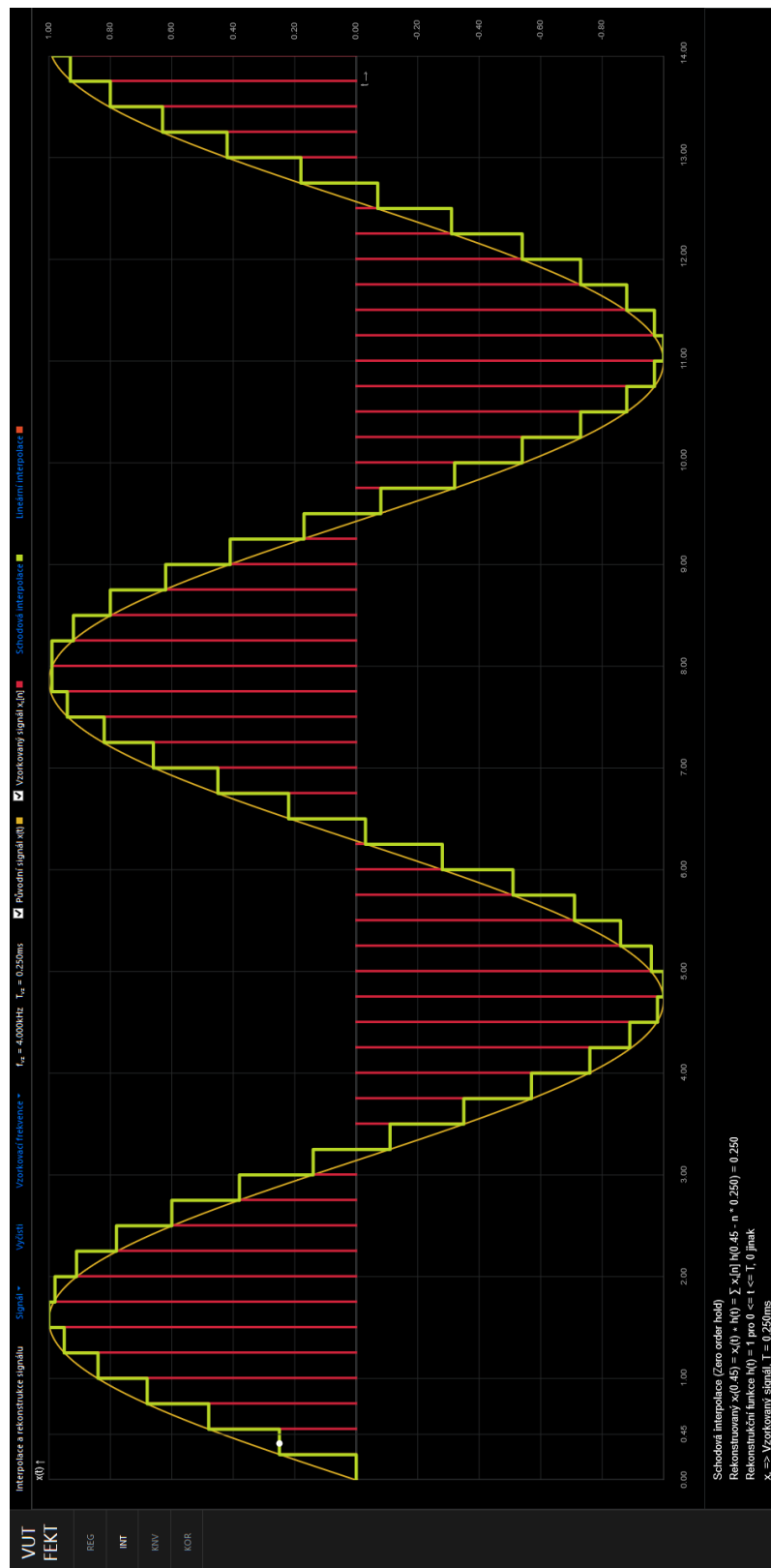
4.4 Aplikace Diskrétní lineární konvoluce

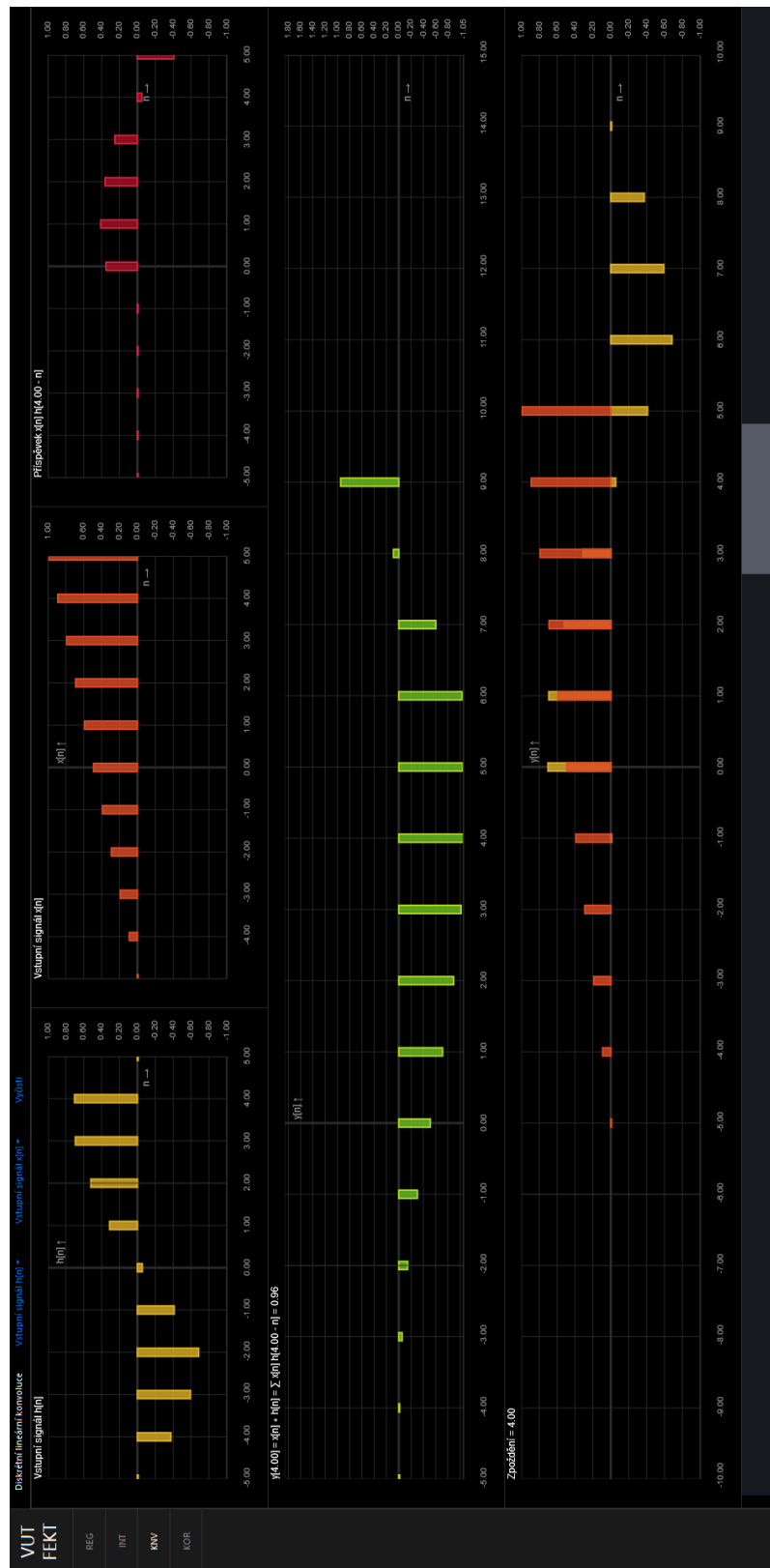
Aplikace konvoluce demonstruje diskrétní lineární konvoluci. Uživatelské rozhraní ukazuje obrázek 4.3. Vrchní panel menu opět umožňuje navolit si nějaký z předvolených signálů pro každý ze signálů konvoluce, nebo vyčistit aplikaci a vrátit ji do počátečního stavu. Jednotlivé vzorky vstupních signálů možno přímo kreslit do plátna tažením myši vlevo nahoře a nahoře uprostřed. Graf vpravo nahoře bude vždy ukazovat aktuální příspěvek škálované a posunuté impulsní odezvy. Velký graf v prostřední části obrazovky zobrazuje výsledek konvoluce pro aktuální zpoždění. V levé horní části tohoto grafu je zobrazena rovnice a hodnota aktuálního vzorku výstupního signálu. Spodní graf znázorňuje jak se jednotlivé signály překrývají v závislosti na zpoždění. Aktuální hodnota zpoždění je vypsána v levé horní části tohoto grafu. Vůbec **nejdůležitější** částí aplikace je posuvník v nejspodnější části obrazovky. Kliknutím, podržením a následným posouváním je možno nastavovat aktuální hodnotu zpoždění jednoho ze signálů vůči druhému. Je **důležité** aby uživatel při tažení posuvníkem byl kurzorem myši stále v **oblasti posuvníku**, jinak nedojde k detekci změny pozice kurzoru. Je to způsobeno tím, že každý prvek aplikace je vykreslen na samostatném plátnu, tudíž každé plátno pracuje s pozicí myši pouze v oblasti sebe sama.

4.5 Aplikace Diskrétní křížová korelace

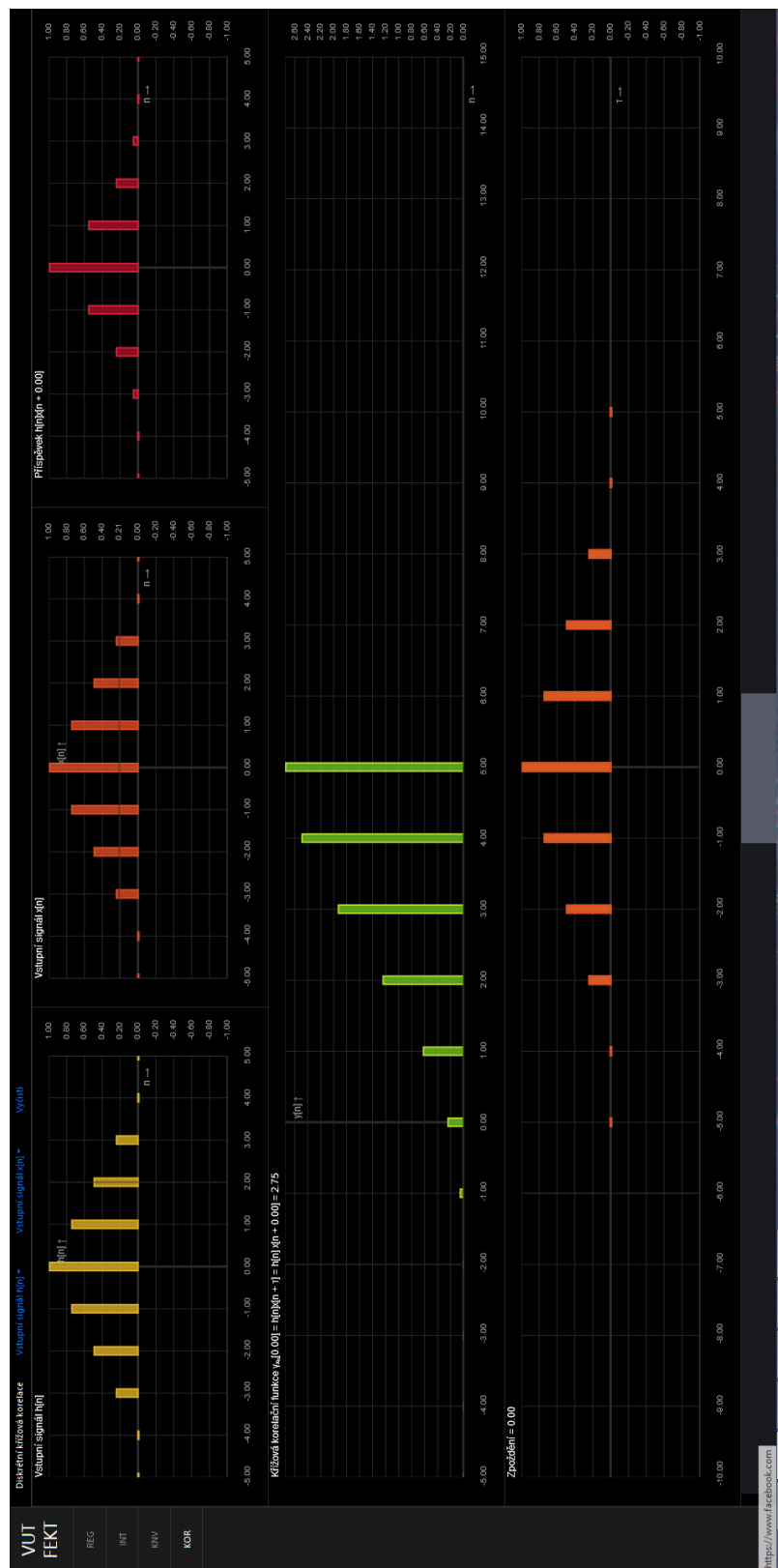
Aplikace korelace demonstruje diskrétní křížovou korelaci. Jak jsme již zmínili v předchozí kapitole, korelace je operace velmi podobná konvoluci, tudíž i rozhraní těchto aplikací je téměř totožné. Rozhraní opět vidíme na obrázku 4.4. Vrchní panel menu je totožný s panelem u aplikace konvoluce. Jednotlivé vzorky vstupních signálů

opět možno přímo kreslit do plátna tažením myši vlevo nahore a nahore uprostřed. Graf vpravo nahore bude vždy ukazovat aktuální příspěvek škálované a posunuté impulsní odezvy. Velký graf v prostřední části obrazovky zobrazuje výsledek korelace pro aktuální zpoždění τ . V levé horní části tohoto grafu je zobrazena rovnice a míra podobnosti signálů s uvažáním aktuálního zpoždění. Spodní graf znázorňuje jak se jednotlivé signály překrývají v závislosti na zpoždění. Aktuální hodnota zpoždění je vypsána v levé horní části tohoto grafu. Rozdílem této aplikace vůči aplikaci konvoluce je ten, že korelace (a tato aplikace) nepracuje s časově otočeným vstupním signálem. Vůbec **nejdůležitější** částí aplikace je posuvník v nejspodnější části obrazovky. Kliknutím, podržením a následným posouváním je možno nastavovat aktuální hodnotu zpoždění jednoho ze signálů vůči druhému. Je **důležité** aby uživatel při tažení posuvníkem byl kurzorem myši stále v **oblasti posuvníku**, jinak nedojde k detekci změny pozice kurzoru. Je to způsobeno tím, že každý prvek aplikace je vykreslen na samostatném plátnu, tudíž každé plátno pracuje s pozicí myši pouze v oblasti sebe sama.





Obr. 4.3: Uživatelské rozhraní aplikace Konvoluce



Obr. 4.4: Uživatelské rozhraní aplikace Korelace

5 ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo nastudovat problematiku jednotlivých operací, a následně tyto znalosti uplatnit v „praxi“ implementací do interaktivních aplikací. Pro vytvoření aplikací byly použity nejmodernější technologie v oblasti vývoje cloud software. Aplikace byly vytvářeny za záměrem podpoření výuky zpracování signálů a měly by pomoci studentům lépe pochopit danou látku. V teoretické části práce jsou popsány matematické a teoretické modely látky, které byly následně implementovány do aplikací. Cíle této práce jako jsou nastudování problematiky, návrh a vývoj software a jeho následné otestování byly, můžu říci úspěšně splněny. Zda však budou skutečně přínosné pro výuku ukáže až čas.

LITERATURA

- [1] FAJMON, B., HLAVIČKOVÁ, I., NOVÁK, M.: *Matematika 3* 240 stran. Brno: Ústav matematiky FEKT VUT v Brně, 2014.
- [2] Příspěvatelé Wikipedie *Lineární regrese* [online]. Wikipedie: Otevřená encyklopedie. c2016, poslední aktualizace 31.05.2016 [cit. 21.11.2017]. Dostupné z URL:
<https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Line%C3%A1rn%C3%AD_regrese&oldid=13760161>.
- [3] DAŇEK, J.: *Aproximace funkcí* [online]. Plzeň: Fakulta aplikovaných věd západočeské univerzity v Plzni, 2003. 25 s. Dostupné z URL:
<http://www.cam.zcu.cz/~danek/Students/2003_ZS/Materialy/aproximace_funkci.pdf>.
- [4] DRAKOS, N., MOORE, R.: *Reconstruction of Signal by Interpolation* [online]. Computer Based Learning Unit, University of Leeds. c2002, Dostupné z URL:
<http://fourier.eng.hmc.edu/e101/lectures/Sampling_theorem/node3.html>.
- [5] SMÉKAL, Z.: *Analýza signálu a soustav* Vysoké učení technické v Brně, 2012. ISBN 978-80-214-4453-9.
- [6] VRBA, V. Aplikace numerických metod aproximace, interpolace a derivování v prostředí Mathematica vhodných pro předmět Matematika I na FAI UTB ve Zlíně. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta aplikované informatiky, 2011/2012. 65 s. Vedoucí bakalářské práce RNDr Miloslav Fialka, CSc. Dostupné z URL:
<http://digilib.k.utb.cz/bitstream/handle/10563/22565/vrba_2012_bp.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- [7] ŠKORPIL, V., VYCHODIL, P., KAPOUN, V.: *Metody přenosu a spojování pro integrovanou výuku VUT a VŠB-TUO* [online] 94 stran. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2014. Dostupné z URL:
<<https://vut-vsbs.cz/home/get-file?file=479&portal=Portal2>>.
- [8] VLACH, J., PRŮŠA, Z., RAJMIC, P.: *Interaktivní applety pro vybrané operace ze signálů* Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2009.
- [9] SMITH, W.: *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing* San Diego, Calif.: California Technical Pub., 1997. ISBN 09-660-1763-3.

6 OBSAH PŘILOŽENÉHO CD

```
/ ..... kořenový adresář přiloženého CD
├── index.html
├── app.js
├── app.css
└── .htaccess
```